

El error como oportunidad para reflexionar y tomar decisiones asertivas en el aprendizaje de las matemáticas

Mistakes as an Opportunity to Ponder and Take Assertive Decisions When Learning Mathematics

Faustino Vizcarra Parra y Saúl Alejandro Gómez Santos

Resumen

El uso de errores para el aprendizaje de las matemáticas es considerada una oportunidad de cuestionamiento y reflexión sobre las fortalezas y debilidades del estudiante a la hora de resolver problemas, así como una ayuda en la toma de decisiones de manera responsable en su vida. A través de la interacción con una lección de MOODLE, el estudiante se enfrenta a situaciones problemáticas de contextos diversos, las cuales están presentadas de manera fragmentada y lo llevan a reflexionar sobre errores comunes que comete al desarrollar procedimientos matemáticos, debido a la deficiencia en la comprensión de un objeto matemático o en su definición. La retroalimentación recibida lo lleva a cuestionar su conocimiento ante un error y lo invita a reflexionar y corregirlo en sus estructuras mentales, es decir, esta actividad propicia un choque cognitivo para lograr un aprendizaje que permite una mejor actuación en la solución de problemas en contextos matemáticos de ingeniería, economía o cultura; además, que los estudiantes están preparándose para ser participantes activos y críticos.

Abstract

Using mistakes as a strategy for learning mathematics is considered an opportunity, to question and ponder about the students' strengths and weaknesses, when solving problems that will also help them to make responsible decisions. Through MOODLE lessons and activities, the students face different problematic situations within a variety of contexts. This situations are to be dissected in order to be solved, which leads the students to ponder on the common mistakes they tend to make, when developing mathematic procedures, or due to lack of comprehension of the mathematic aim and its definition. It is very important for students to receive feedback regarding their mistakes, since it leads them to question their knowledge, and invites them to reflect and correct their mental structures; that's to say, feedback prompts them to learn through cognitive conflict. Then, students can optimize their performance, as they solve a mathematical problem within an engineering, social, economic and cultural context. Besides, it also prepares them to be active and critic members of a democracy, and work to solve problems that would make this world better.

Palabras clave: competencias; error matemático; objeto matemático y responsabilidad social.

Keywords: Mathematic Mistakes; Mathematic Object and Social Responsibility; Skills.

INTRODUCCIÓN

La matemática ha estado presente en nuestras vidas desde hace siglos y se ha desarrollado bajo dos líneas, la primera, en el sentido de mejorar la calidad de vida de las personas, en tanto que la segunda, en la de crear matemática para resolver problemas teóricos: la cuadratura del círculo; demostrar que de la raíz cuadrada de dos es un número irracional; los problemas derivados de la geometría euclidiana y el último teorema de Fermat, por mencionar algunos. Además, las teorías matemáticas que se desarrollan a corto o a largo plazo tienen aplicación en la creación de objetos o cosas que hacen más cómoda la vida del hombre, sin embargo, en el entorno educativo se presenta una matemática divorciada del mundo real.

Ahora, la pregunta de interés es, ¿cómo contribuye la matemática en la responsabilidad social de los estudiantes de la modalidad a distancia?, esta es una pregunta interesante debido a la naturaleza de la matemática, pues esta contribuye a través del desarrollo de competencias disciplinares y genéricas establecidas en el perfil de egreso del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa; dichas competencias son retomadas en los programas de estudio de matemáticas del bachillerato virtual. Cabe mencionar que las competencias genéricas están orientadas al desarrollo de actitudes y valores en los estudiantes, además, actualmente son de gran importancia debido al alto nivel de problemáticas sociales.

Bajo el enfoque por competencias desde las matemáticas se desarrolla la capacidad para resolver situaciones en diversos contextos (ver los libros *Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers* y *A Guide for Integra-*

ting Issues of Social and Economic Justice into Mathematics Curriculum), así como el fomento de habilidades para la toma de decisiones de forma responsable en la vida, a la vez que los estudiantes adquieren habilidades académicas esenciales. En este sentido, se integran las competencias, los contenidos y el contexto de las situaciones problemáticas al diseño de lecciones de MOODLE.

En cada lección se incluye una situación problemática que es fragmentada para su solución. En cada fragmento se presentan orientaciones para su solución y una pregunta de opción múltiple, cuyas respuestas una es la correcta y el resto reactivos surgidos de un error matemático: una concepción errada de algún concepto u objeto, entre otros. Si la respuesta elegida es la correcta el flujo de la lección se orienta hacia el siguiente fragmento, en caso contrario, se encamina hacia la retroalimentación de acuerdo a la falla cometida, para luego hacer que el alumno regrese al fragmento donde ocurrió esta. Este proceso continúa hasta que el estudiante logre resolver la situación problemática.

Esta es una forma de contribuir en la responsabilidad social de los estudiantes desde las matemáticas, además, es bueno recordar que en la vida cotidiana se aprende de los errores, los cuales deben ser vistos como una forma de crecimiento en todos los sentidos.

FUNDAMENTO TEÓRICO

Equivocarse en la escuela de la vida debe ser visto como una forma de crecimiento. Por su parte, en la educación a distancia, de acuerdo con D'Amore (2006), en el área de matemáticas, el error ocupa un lugar privilegiado, ya que se

considera una oportunidad para el aprendizaje de un objeto matemático, entendido como todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas. En cuanto al error, se asume la siguiente definición: “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, Batanero & Font, 2003). En consecuencia, los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza.

El error puede verse como una forma de aprendizaje para no volver a cometerlo. En este sentido, Borasi (1994) considera que los errores son analizados con dos objetivos fundamentales: para eliminarlos o para explorar su potencialidad. Así que, el estudio de los errores cometidos por estudiantes ha sido un tema de investigación permanente en la educación matemática, como el caso de Radatz (1980), que realiza una clasificación de errores. A partir del procesamiento de la información establece las siguientes cinco categorías generales:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. Se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el cambio del lenguaje común al lenguaje matemático.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Son los cometidos por deficiencias en el manejo de algoritmos, hechos básicos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas del pensamiento. Son causados por

la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas; comprenden los errores por perseverancia, los errores de asociación, los errores de interferencia y los errores de asimilación.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

En todo proceso de enseñanza y aprendizaje se generan errores, algunos de los cuales se presentan de forma inevitable, es decir, surgen en un marco conceptual consistente, basado en conocimientos previos. Por otra parte, Rico (1995) argumenta que el estudiante no toma conciencia del error, pues no cuestiona lo que le parece obvio y no considera el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabaja, es por ello la importancia de hacerle ver que ha cometido un error y proveerle condiciones para que lo reconozca y lo erradique. Además, el potencial del error se puede utilizar para motivar y cambiar la actitud del estudiante hacia las matemáticas.

Por otra parte, Gutstein y Peterson (2013), argumentan que sin las matemáticas es imposible comprender plenamente un presupuesto, el impacto de una guerra, el significado de una deuda nacional, o los efectos a largo plazo de una propuesta como la privatización de la seguridad social y los problemas ecológicos. Para integrar este tipo de situaciones al bachillerato es necesaria la actualización de los docentes del área de matemáticas, es decir, que se den la oportunidad de salir de su espacio de confort para innovar y asumir una postura responsable ante la actual situación mundial.

En Uruguay las reformas educativas van en el siguiente sentido: “Es necesario educar para la autonomía personal y la responsabilidad social en una sociedad interdependiente e intercomunicada globalmente” (Vilaró, 2005). Mientras que en Brasil, empresas y gobierno trabajan de manera

conjunta sobre el tema, en particular, sobre el aprendizaje de las matemáticas: “El punto inicial es que nuestros alumnos no saben matemáticas ni ciencia” (Bergamaschi, 2014).

En el caso de México, a nivel medio superior en el 2007, uno de los objetivos fue “Ofrecer servicios educativos de calidad para formar personas con alto sentido de responsabilidad social, que participen de manera productiva y competitiva en el mercado laboral” (SEP, 2007). Durante el año 2013, como parte de su visión, se afirma que “es necesario que la educación forme para la convivencia, los derechos humanos y la responsabilidad social, el cuidado de las personas, el entendimiento del entorno, la protección del medio ambiente, la puesta en práctica de habilidades productivas y, en general, para el desarrollo integral de los seres humanos” (SEP, 2013). En consecuencia, el tema de la responsabilidad social es atendido a través del desarrollo de competencias disciplinares y genéricas, enmarcadas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS).

METODOLOGÍA

Resulta importante vincular las matemáticas con situaciones problemáticas de diferentes contextos, si bien, sin dejar de lado lo que se ha venido haciendo. Sin embargo, proponer situaciones que sean de interés para los estudiantes, es decir, en las que se promueva el desarrollo de las competencias disciplinares y genéricas (incluidas en los programas de estudio de matemáticas), en las que se utilicen –como plataforma– contenidos específicos de matemáticas, resulta un gran reto para los profesores. Un primer paso es identificar las competencias que se pretenden desarrollar; luego, los conceptos y habilidades matemáticas que se quiere que los alumnos aprendan y desarrollen; después, seleccionar la situación problemática con un contexto determinado, y por último, integrar todo en el diseño de la actividad lección, sin olvidar el tema de los errores matemáticos comunes, como se muestra en la Figura 1.

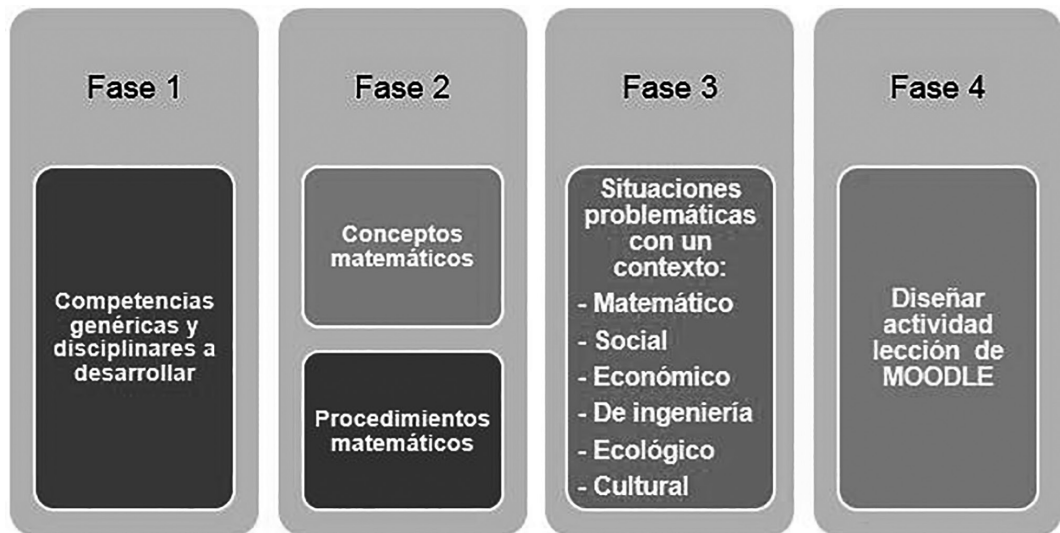


Figura 1. Fases y elementos a integrar en el diseño de la actividad lección de MOODLE.

Las fases de la figura 1 se integran en una lección, en la que al comienzo se plantea una situación problemática con énfasis en el uso correcto de las propiedades matemáticas y en la sintaxis del lenguaje matemático, como se expone en la Figura 2. Cabe mencionar que, así como suele haber deficiencias en la escritura (ortografía y sintaxis), en el caso del lenguaje matemático también se presentan.

nes para obtener la respuesta correcta, como se expone en la Figura 4.

Si la respuesta es incorrecta, el flujo de la lección lo lleva a la pantalla que contribuye a erradicar el posible error cometido, como se muestra en la Figura 5. Las respuestas incorrectas se diseñan a partir de los errores más comunes que comenten los estudiantes. Para el diseño de dichas respuestas incorrectas se apli-

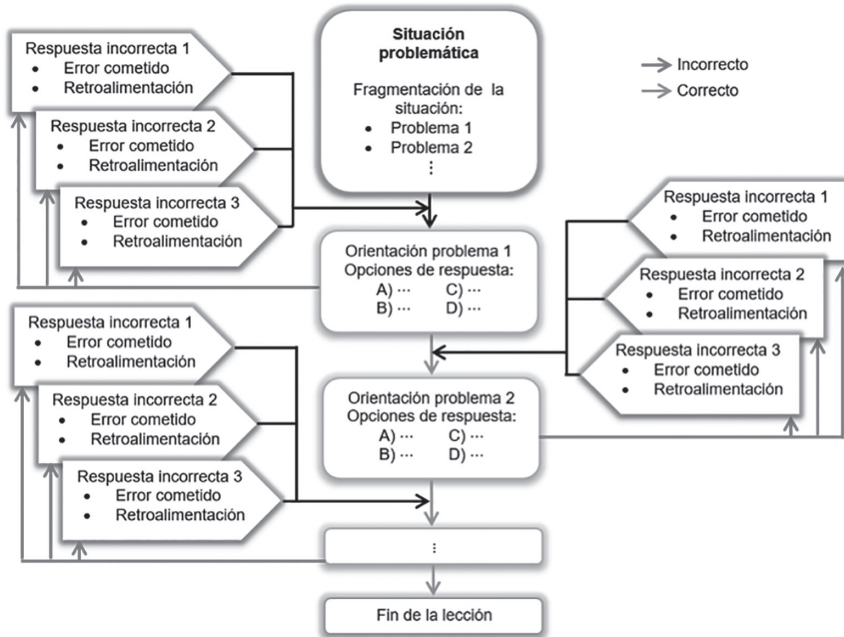


Figura 2. Flujo de la lección que guía al estudiante según la respuesta seleccionada de cada problema particular en que es fragmentada una situación problemática.

Al inicio de la lección, en la primera pantalla, se plantea el contexto que contiene de forma explícita el objeto de aprendizaje, dicho contexto está fragmento en situaciones particulares (pensamiento analítico), como se muestra en la Figura 3.

En la siguiente pantalla de la lección se muestra el tercer fragmento de la situación problemática, en la que se brindan orientacio-

ca la metodología que implementa el Centro Nacional para la Evaluación Superior (CENEVAL).

Ante cada respuesta incorrecta se explica el tipo de error que se cometió y se retroalimenta con la intención de erradicarlo. Asimismo, se incluyen ejemplos donde se usan motores de cálculo algebraico para teléfonos inteligentes (MyScript Calculator y Fraction Calculator) y graficadores (Desmos y Mathematics), todo esto con la intención de comprobar y corregir el

Lección 3.4: Punto medio de un segmento de recta.

Punto medio de un segmento de recta.

En esta lección, se aborda cómo determinar el punto medio de un segmento de recta.

Sea $\overline{P_1P_2}$ un segmento cuyos extremos tienen coordenadas $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio $P_m(x_m, y_m)$ de $\overline{P_1P_2}$ son:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{y} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

El problema a resolver es el siguiente:

Determinar el punto medio $P_m(x_m, y_m)$ del segmento de recta cuyos extremos son los puntos $A(3, -2)$ y $B(-7, -8)$.

Para ello, se sigue seguir los pasos siguientes:

- Identificar los valores de las coordenadas de los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.
- Sustituir los valores de las coordenadas x_1, y_1, x_2, y_2 en las fórmulas

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{y} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Determinar las coordenadas x_m y y_m .

Figura 3. Ejemplo de una situación problemática en un contexto matemático.

Lección 3.4: Punto medio de un segmento de recta.

Determinar las coordenadas del punto medio x_m y y_m del segmento de recta cuyos extremos son los puntos $A(3, -2)$ y $B(-7, -8)$.

Recuerda que:

$$x_m = \frac{3 + (-7)}{2} \quad , \quad y_m = \frac{-2 + (-8)}{2}$$

Los valores de x_m y y_m son:

- $x_m = -2$, $y_m = -5$
- $x_m = 1/3$, $y_m = -15/2$
- $x_m = -2$, $y_m = 5$
- $x_m = -1/3$, $y_m = 15/2$

Figura 4. Ejemplo de un fragmento de una situación problemática en un contexto matemático.

Respuesta incorrecta: retroalimentación.

La respuesta elegida es incorrecta, posiblemente se cometió algún error en los cálculos al desarrollar:

$$x_m = \frac{3 + (-7)}{2} \quad , \quad y_m = \frac{-2 + (-8)}{2}$$

Error al sumar dos números negativos:

Al realizar la operación

$$\frac{-2 + (-8)}{2}$$

Primero se cancela el paréntesis

$$\frac{-2 + (-8)}{2} = \frac{-2 - 8}{2}$$

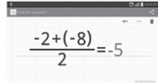
Luego, en el numerador, se realiza la suma de dos números negativos

$$\frac{-2 - 8}{2} = \frac{-10}{2}$$

Por último, el resultado es -5

Se puede verificar en la aplicación para smartphone

MyScript Calculator



Recuerda que al sumar dos números negativos, el resultado es negativo.

Un ejemplo en la vida cotidiana: si debes 2 pesos y luego pides prestados 8 pesos, ahora debes 10 pesos.

Figura 5. Ejemplo de la retroalimentación al elegir una respuesta incorrecta.

resultado de operaciones matemáticas y gráficas de ecuaciones que el alumno realiza de manera incorrecta, como se expone en la Figura 6.

los programas de estudio de matemáticas, es decir, mediante la solución de situaciones problemáticas de un contexto matemático, social,

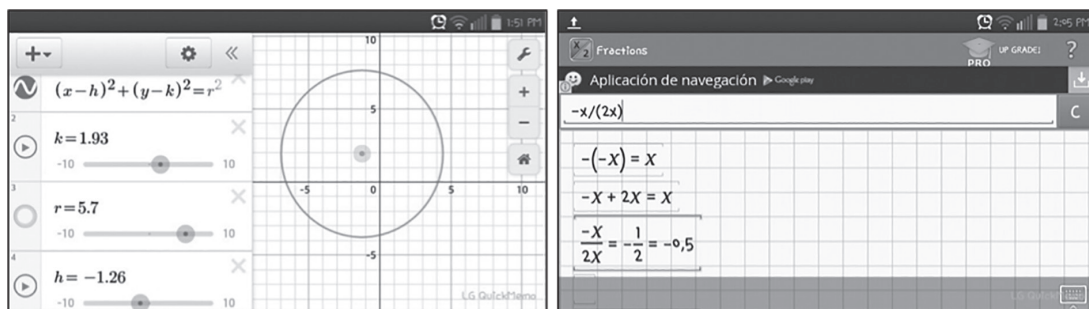


Figura 6. Pantallas del graficador Desmos y del motor de cálculo Fraction Calculator.

Las respuestas incorrectas se diseñan a partir de los errores más comunes que comenten los estudiantes. Resulta interesante que el error es potencializado en su beneficio con el propósito de que le cause un conflicto en sus estructuras mentales. Este escenario educativo rescata lo esencial del proceso de mediación que se da entre el facilitador y estudiante. Cuando el profesor expone el error cometido por el alumno y le explica cómo corregirlo se genera un cambio significativo en la percepción de éste; en este sentido, así es como se diseñan las lecciones.

Cabe resaltar que mediante la retroalimentación y reflexión de sus errores el estudiante es libre de explorar sus creencias y obtener respuestas específicas a sus acciones. Además, la retroalimentación debe estimularlo y motivarlo a continuar cuestionándose sobre sus errores y aciertos; asimismo, dicha retroalimentación coadyuva a promover la integración de la vida real y las operaciones matemáticas.

CONCLUSIONES

A través de la actividad lección se espera contribuir a que el estudiante desarrolle las competencias genéricas y disciplinares plasmadas en

de ingeniería, económico o cultural; asimismo, se pretende que por medio del error el alumno reconozca la importancia de su actuación en la sociedad, así como los beneficios de saber tomar decisiones de manera asertiva.

Asimismo, el estudiante reconocerá el potencial de las matemáticas como herramienta de análisis para entender y transformar el mundo, y que no solo se trata de un conjunto de reglas que tiene que aprender a usar en contextos desligados de la realidad. El aprendizaje mediante el error lleva al alumno a conectar las matemáticas con su historia cultural, además, apreciar las contribuciones que las diversas culturas han hecho a esta ciencia y comprender el potencial de esta disciplina para la construcción de una sociedad democrática.

REFERENCIAS

- Bergamaschi, A. (2014). Educación para la ciencia y tecnología en Brasil: panorama, retos y caminos. En Minnicelli, A. (comp.), *1er Congreso Internacional de Responsabilidad Social*. Buenos Aires, Argentina.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on Errors as “Springboards for Inquiry”: A Teaching Experiment.

Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 166-208.

- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 177-195. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509909>
- Godino, J., Batanero C. & Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Gutstein, E. & Peterson, B. (Eds.). (2013). *Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers*. Milwaukee, EE.UU.: Rethinking Schools.
- Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics*, 1, 16-20.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En Kilpatrick, J., Gómez, P. P. & Rico L. (eds.), *Educación matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Secretaría de Educación Pública (2007). Programa Sectorial de Educación 2007-2012. México. Recuperado de http://www.oei.es/quipu/mexico/programa_sectorial_educacion_mexico.pdf
- Secretaría de Educación Pública (2013). Programa Sectorial de Educación 2013-2018. México. Recuperado de http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/4479/4/images/PROGRAMA_SECTORIAL_DE_EDUCACION_2013_2018_WEB.pdf

Faustino Vizcarra Parra

Universidad Autónoma de Sinaloa
faustinovizcarra@uas.edu.mx

Saúl Alejandro Gómez Santos

Universidad Autónoma de Sinaloa
saulgomez@uas.edu.mx

Fecha de recepción: 7 de noviembre de 2015

Fecha de aceptación: 1 de mayo de 2016